

EXERCICE N°1 :

1⁰) a - $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$. A.N: $\omega_0 = \sqrt{\frac{40}{0,1}}$ et $\omega_0 = 20 \text{ rad.s}^{-1}$.

b - $\omega_e = \frac{2\pi}{T_e} \xrightarrow{T_e = \frac{\Delta t}{10}} \omega_e = 2\pi \frac{10}{\Delta t}$. A.N: $\omega_e = 2\pi \frac{10}{4}$ et $\omega_e = 5\pi \text{ rad.s}^{-1}$ ($\omega_e = 15,71 \text{ rad.s}^{-1}$)

c - Le pendule élastique, de pulsation propre ω_0 , oscille à la pulsation ω_e imposée par l'excitateur. Il effectue donc des oscillations forcées.

2⁰) a - $Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 \cdot \omega_e^2 + \left(\frac{1}{C} - L \cdot \omega_e^2\right)^2}} \xrightarrow{\text{analogie électrique-mécanique}} X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 \cdot \omega_e^2 + \left(K - m \cdot \omega_e^2\right)^2}}$

b - Résonance d'élongation $\rightarrow X_m$ est maximale $\rightarrow y(\omega_e) = h^2 \cdot \omega_e^2 + (K - m \cdot \omega_e^2)^2$ est minimale

$\rightarrow \frac{dy}{d\omega_e} = 0$.

$\rightarrow 2 \cdot h^2 \cdot \omega_e + 2(K - m \cdot \omega_e^2) \cdot (-2m \cdot \omega_e) = 0 \rightarrow h^2 - 2m(K - m \cdot \omega_e^2) = 0 \rightarrow h^2 - 2mK + 2m \cdot \omega_e^2 = 0$

$\rightarrow 2m \cdot \omega_e^2 = 2mK - h^2 \rightarrow \omega_e^2 = \frac{2mK - h^2}{2m^2} \rightarrow \omega_e^2 = \frac{K}{m} - \frac{h^2}{2m^2}$

Sachant que $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$, la résonance d'élongation a lieu pour $\omega_e = \omega_r$ telle que : $\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}$.

c - $\omega_e = \omega_r \rightarrow \omega_e^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2} \rightarrow \frac{h^2}{2m^2} = \omega_0^2 - \omega_e^2 \rightarrow h^2 = 2m^2(\omega_0^2 - \omega_e^2)$ et $h = \sqrt{2m^2(\omega_0^2 - \omega_e^2)}$.

A.N : $h = \sqrt{2 \cdot (0,1)^2 \left((20)^2 - (5\pi)^2\right)}$ et $h = 1,75 \text{ Kg.s}^{-1}$.

3⁰) a - $I_m = \frac{U_m}{Z}$ avec $Z = \sqrt{R^2 + \left(L \cdot \omega_e - \frac{1}{C \cdot \omega_e}\right)^2}$
 $\xrightarrow{\text{analogie électrique-mécanique}} V_m = \frac{F_m}{Z_m}$ avec $Z_m = \sqrt{h^2 + \left(m \cdot \omega_e - \frac{K}{\omega_e}\right)^2}$

b - $\cos(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{R}{Z} \xrightarrow{\text{analogie électrique-mécanique}} \cos(\varphi_e - \varphi_v) = \frac{h}{Z_m}$.

c - Résonance de vitesse $\rightarrow V_m$ est maximale $\rightarrow Z_m = \sqrt{h^2 + \left(m \cdot \omega_e - \frac{K}{\omega_e}\right)^2}$ est minimale

$\rightarrow m \cdot \omega_e - \frac{K}{\omega_e} = 0 \rightarrow m \cdot \omega_e = \frac{K}{\omega_e} \rightarrow \omega_e^2 = \frac{K}{m} \xrightarrow{\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}} \omega_e = \omega_0$.



A la résonance de vitesse :

$$* Z_{m0} = h \rightarrow V_{m0} = \frac{F_m}{h}.$$

$$* Z_{m0} = h \rightarrow \cos(\varphi_e - \varphi_v) = 1 \rightarrow \varphi_e - \varphi_v = 0 \text{ et } \varphi_e = \varphi_v \xrightarrow{v = \frac{dx}{dt} \rightarrow \varphi_v = \varphi_x + \frac{\pi}{2}} \varphi_e = \varphi_x + \frac{\pi}{2}.$$

4⁰) a - La force excitatrice $F(t)$ est toujours en avance de phase par rapport à l'élongation $x(t)$ donc la courbe (a) correspond à $F(t)$ et la courbe (b) correspond à $x(t)$.

* Graphiquement : $F_m = 2,75 \text{ N}$.

$$\begin{cases} F(0) = 0 \\ \left(\frac{dF(t)}{dt} \right)_{t=0} > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_m \cdot \sin \varphi_e = 0 \rightarrow \sin \varphi_e = 0 \rightarrow \varphi_e = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \\ \omega_e \cdot F_m \cdot \cos \varphi_e > 0 \rightarrow \cos \varphi_e > 0 \end{cases} \rightarrow \varphi_e = 0.$$

* Graphiquement : $X_m = 0,1 \text{ m}$.

$$* \Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_x$$

$$|\Delta\varphi| = 2\pi \frac{|\Delta t|}{T_e} \rightarrow |\Delta\varphi| = 2\pi \frac{1}{4} \text{ et } |\Delta\varphi| = \frac{\pi}{2}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_x > 0 \rightarrow \varphi_e - \varphi_x = \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$

b - $\varphi_e - \varphi_x = \frac{\pi}{2} \rightarrow \varphi_e = \varphi_x + \frac{\pi}{2}$ donc l'oscillateur est en état de résonance de vitesse.

$$\text{c - Résonance de vitesse} \rightarrow \omega_e = \omega'_0 \rightarrow \omega_e = \sqrt{\frac{K}{m'}} \rightarrow \omega_e^2 = \frac{K}{m'} \text{ et } m' = \frac{K}{\omega_e^2}.$$

$$\text{A.N : } m' = \frac{40}{(5\pi)^2} \text{ et } m' = 162,1 \cdot 10^{-3} \text{ Kg}.$$

$$\text{d - } V_{m0} = \frac{F_m}{h}. \text{ A.N : } V_{m0} = \frac{2,75}{1,75} \text{ et } V_{m0} = 1,57 \text{ m.s}^{-1}.$$

EXERCICE N°2 :

1⁰) a - La force excitatrice $F(t)$ est toujours en avance de phase par rapport à l'élongation $x(t)$ donc la courbe (a) correspond à $F(t)$ et la courbe (b) correspond à $x(t)$.

$$* \omega_e = \frac{2\pi}{T_e} \xrightarrow{\text{graphiquement } T_e = 36,28 \cdot 10^{-2} \text{ s}} \omega_e = \frac{2\pi}{36,28 \cdot 10^{-2}} \text{ et } \omega_e = 17,32 \text{ rad.s}^{-1} \text{ (ou } \omega_e \approx 5,51\pi \text{ rad.s}^{-1}).$$

* Graphiquement : $F_m = 2 \text{ N}$.

$$\begin{cases} F(0) = 0 \\ \left(\frac{dF(t)}{dt} \right)_{t=0} > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_m \cdot \sin \varphi_e = 0 \rightarrow \sin \varphi_e = 0 \rightarrow \varphi_e = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \\ \omega_e \cdot F_m \cdot \cos \varphi_e > 0 \rightarrow \cos \varphi_e > 0 \end{cases} \rightarrow \varphi_e = 0.$$

* Graphiquement : $X_m = 0,1 \text{ m}$.

b - Soit $\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_x$.

$$|\Delta\varphi| = 2\pi \frac{|\Delta t|}{T_e} \rightarrow |\Delta\varphi| = 2\pi \frac{1}{6} \text{ et } |\Delta\varphi| = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{or } \Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_x > 0 \rightarrow \varphi_e - \varphi_x = \frac{\pi}{3} \text{ rad}.$$



2⁰) a - D'après la représentation de Fresnel :

$$\begin{cases} K.X_m = 4 \\ m.\omega_e^2.X_m = 3 \end{cases} \rightarrow \frac{m.\omega_e^2}{K} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\omega_0^2 = \frac{K}{m}} \frac{\omega_e^2}{\omega_0^2} = \frac{3}{4} \text{ et } \frac{\omega_e}{\omega_0} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}.\omega_e. \text{ A.N: } \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}.17,32 \text{ et } \omega_0 = 20 \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$\mathbf{b} - * K.X_m = 4 \rightarrow K = \frac{4}{X_m} \xrightarrow{X_m = 10^{-1} \text{ m}} K = \frac{4}{10^{-1}} \text{ et } K = 40 \text{ N.m}^{-1}.$$

$$* m.\omega_e^2.X_m = 3 \rightarrow m = \frac{3}{\omega_e^2.X_m} \xrightarrow{\omega_e = 17,32 \text{ rad.s}^{-1}} m = \frac{3}{(17,32)^2.10^{-1}} \text{ et } m = 0,1 \text{ Kg}.$$

$$\text{Remarque : } \omega_0^2 = \frac{K}{m} \rightarrow m = \frac{K}{\omega_0^2}. \text{ A.N: } m = \frac{40}{(20)^2} \text{ et } m = 0,1 \text{ Kg}.$$

$$* \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{h.\omega_e.X_m}{F_m} \rightarrow h = \frac{F_m.\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\omega_e.X_m}. \text{ A.N: } h = \frac{2.\sqrt{3}}{17,32.10^{-1}} \text{ et } h = 1 \text{ Kg.s}^{-1}.$$

$$\text{Remarque : } \text{tg}\Delta\varphi = \frac{h.\omega_e}{K - m\omega_e^2} \rightarrow h = \frac{(K - m\omega_e^2).\text{tg}\Delta\varphi}{\omega_e} \text{ A.N: } h = \frac{\frac{4-3}{10^{-1}}.\sqrt{3}}{17,32} \text{ et } h = 1 \text{ Kg.s}^{-1}.$$

$$\mathbf{3^0) a} - V_m = \omega_e.X_m \rightarrow X_m = \frac{V_m}{\omega_e} \rightarrow X_m = \frac{F_m}{\omega_e.\sqrt{h^2 + \left(\frac{K}{\omega_e} - m.\omega_e\right)^2}} \text{ et } X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega_e^2 + (K - m.\omega_e^2)^2}}.$$

$$\mathbf{b} - \text{Résonance d'élongation} \rightarrow X_m \text{ est maximale} \rightarrow y(\omega_e) = h^2.\omega_e^2 + (K - m.\omega_e^2)^2 \text{ est minimale} \rightarrow \frac{dy}{d\omega_e} = 0.$$

$$\rightarrow 2.h^2.\omega_e + 2(K - m.\omega_e^2).(-2m.\omega_e) = 0 \rightarrow h^2 - 2m(K - m.\omega_e^2) = 0 \rightarrow h^2 - 2mK + 2m.\omega_e^2 = 0$$

$$\rightarrow 2m.\omega_e^2 = 2mK - h^2 \rightarrow \omega_e^2 = \frac{2mK - h^2}{2m^2} \rightarrow \omega_e^2 = \frac{K}{m} - \frac{h^2}{2m^2}$$

$$\text{Sachant que } \omega_0^2 = \frac{K}{m}, \text{ la résonance d'élongation a lieu pour } \omega_e = \omega_r \text{ telle que : } \omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}.$$

$$\mathbf{c} - V_m(\omega_e) = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{K}{\omega_e} - m.\omega_e\right)^2}} \rightarrow V_m(0) = 0 : \text{ la courbe (c) représente } V_m.$$

$$X_m(\omega_e) = \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega_e^2 + (K - m.\omega_e^2)^2}} \rightarrow X_m(0) = \frac{F_m}{K} : \text{ la courbe (d) représente } X_m.$$

$$\mathbf{d} - * \text{ A la résonance de vitesse : } \begin{cases} \omega_e = \omega_0 \xrightarrow{\text{graphiquement}} \omega_0 = 20 \text{ rad.s}^{-1} \\ V_{m0} = \frac{F_m}{h} \rightarrow h = \frac{F_m}{V_{m0}} \xrightarrow{\frac{F_m = 2 \text{ N}}{V_{m0} = 2 \text{ m.s}^{-1}}} h = \frac{2}{2} \text{ et } h = 1 \text{ Kg.s}^{-1} \end{cases}$$

$$* X_m(0) = \frac{F_m}{K} \rightarrow K = \frac{F_m}{X_m(0)} \xrightarrow{\frac{F_m = 2 \text{ N}}{X_m(0) = 0,5.10^{-1} \text{ m}}} K = \frac{2}{0,05} \text{ et } K = 40 \text{ N.m}^{-1}.$$

$$* \omega_0^2 = \frac{K}{m} \rightarrow m = \frac{K}{\omega_0^2}. \text{ A.N: } m = \frac{40}{(20)^2} \text{ et } m = 0,1 \text{ Kg}.$$



4⁰) a - Graphiquement : $\omega_{e2} = 40 \text{ rad.s}^{-1}$.

$$\text{b - } V_{m1} = V_{m2} \rightarrow \frac{K}{\omega_{e1}} - m \cdot \omega_{e1} = m \cdot \omega_{e2} - \frac{K}{\omega_{e2}} \rightarrow m(\omega_{e2} + \omega_{e1}) = K \left(\frac{1}{\omega_{e1}} + \frac{1}{\omega_{e2}} \right)$$

$$\rightarrow m(\omega_{e2} + \omega_{e1}) = K \left(\frac{\omega_{e2} + \omega_{e1}}{\omega_{e1} \cdot \omega_{e2}} \right) \rightarrow \omega_{e1} \cdot \omega_{e2} = \frac{K}{m} \xrightarrow{\omega_0^2 = \frac{K}{m}} \omega_{e1} \cdot \omega_{e2} = \omega_0^2.$$

$$\omega_{e1} \cdot \omega_{e2} = \omega_0^2 \rightarrow \omega_{e2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_{e1}}. \text{ A.N: } \omega_{e2} = \frac{(20)^2}{10} \text{ et } \omega_{e2} = 40 \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$V_{m2} = \omega_{e2} \cdot X_{m2} \rightarrow X_{m2} = \frac{V_{m2}}{\omega_{e2}} \xrightarrow{V_{m2} = V_{m1} = 0,625 \text{ m.s}^{-1}} X_{m2} = \frac{0,625}{40} \text{ et } X_{m2} = 1,56 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

