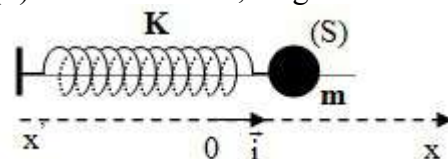


EXERCICE N°1 :

On dispose d'un pendule élastique horizontal constitué par un ressort (R) à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur $K = 40 \text{ N.m}^{-1}$, et d'un solide (S) de masse $m = 0,1 \text{ Kg}$.

Le solide (S), pouvant glisser sur un plan horizontal parallèle à l'axe du ressort, est soumis à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -h.\vec{v}$ où h est une constante positive et $\vec{v}$ est la vitesse instantanée du solide.



Le mouvement de l'oscillateur est étudié dans le repère $(0, \vec{i})$ dont l'origine 0 coïncide avec la position d'équilibre du centre d'inertie G de (S) sur un axe $x'x$ parallèle à l'axe du ressort.

On excite l'oscillateur par une force horizontale sinusoïdale $F(t) = F_m \sin(\omega_e.t + \varphi_e)$ de pulsation ω_e .

Le solide (S) effectue alors un mouvement rectiligne sinusoïdal d'élongation $x(t) = X_m \sin(\omega_e.t + \varphi_x)$.

1⁰) a - Calculer la valeur de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur mécanique considéré.

b - La mesure de la durée correspondant à 10 oscillations du système donne $\Delta t = 4 \text{ s}$.

En déduire la valeur de la pulsation ω_e de la force excitatrice.

c - Justifier alors le caractère forcé de ces oscillations.

2⁰) On rappelle que pour un oscillateur électrique (R,L,C) en régime forcé, la charge électrique maximale du condensateur est donnée par l'expression :

$$Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2.\omega_e^2 + \left(\frac{1}{C} - L.\omega_e^2\right)^2}}.$$

a - En utilisant l'analogie formelle électrique-mécanique, écrire l'équivalent mécanique de cette expression.

b - Montrer que la résonance d'élongation est obtenue pour une pulsation ω_r telle que :

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2.m^2}.$$

c - Déterminer la valeur de h sachant que la pulsation ω_e de la force excitatrice est égale à la pulsation ω_r de résonance d'élongation ?

3⁰) a - On rappelle que pour un oscillateur électrique (R,L,C) en régime forcé, l'intensité électrique maximale du courant est donnée par l'expression :

$$I_m = \frac{U_m}{Z} \quad \text{avec} \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(L.\omega_e - \frac{1}{C.\omega_e}\right)^2}.$$

En utilisant l'analogie formelle électrique-mécanique, donner l'équivalent mécanique de cette expression.

b - Le facteur de puissance d'un oscillateur électrique (R,L,C) en régime forcé est donné par l'expression :

$\cos(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{R}{Z}$, déduire l'expression de son équivalent mécanique.

c - Montrer alors qu'à la résonance de vitesse on a :

$$V_{m0} = \frac{F_m}{h} \quad \text{et} \quad \varphi_e = \varphi_x + \frac{\pi}{2}.$$



4⁰) Sans changer la pulsation ω_e de la force excitatrice, on remplace le solide (S) par un autre solide (S') de masse m' . Un système d'acquisition, relié à un ordinateur, permet de tracer les courbes d'évolution de la force excitatrice F et de l'élongation x en fonction du temps. On obtient le graphe ci-dessous :

a - En identifiant chacune des courbes (a) et (b), déterminer graphiquement :

* la valeur maximale F_m de la force excitatrice et celle de sa phase initiale φ_e .

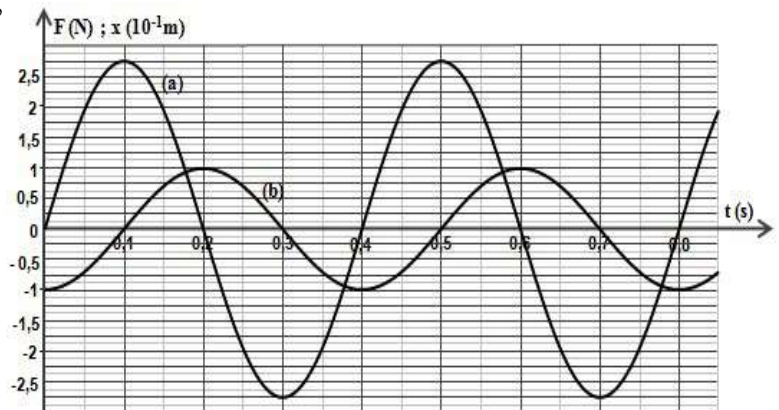
* la valeur de l'amplitude X_m des oscillations.

* le déphasage $\varphi_e - \varphi_x$ entre la force excitatrice et l'élongation.

b - Dédurre que l'oscillateur est en état de résonance de vitesse.

c - Calculer alors la valeur de la masse m' du solide (S').

d - Calculer la valeur de la vitesse maximale V_{m0} .

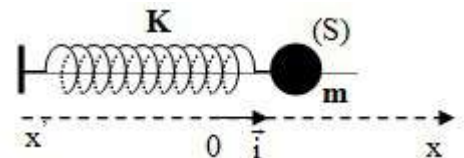


EXERCICE N°2 :

On dispose d'un pendule élastique horizontal constitué par un ressort (R) à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur K , et d'un solide (S) de masse m .

Le solide (S), pouvant glisser sur un plan horizontal parallèle à l'axe du ressort, est soumis à une force de frottement visqueux

$\vec{f} = -h \cdot \vec{v}$ où h est une constante positive et $\vec{v}$ est la vitesse instantanée du solide.



Le mouvement de l'oscillateur est étudié dans le repère $(0, \vec{i})$ dont l'origine 0 coïncide avec la position d'équilibre du centre d'inertie G de (S) sur un axe $x'x$ parallèle à l'axe du ressort.

On excite l'oscillateur par une force horizontale sinusoïdale $F(t) = F_m \sin(\omega_e \cdot t)$ de pulsation ω_e .

Le solide (S) effectue alors un mouvement rectiligne sinusoïdal d'élongation $x(t) = X_m \sin(\omega_e \cdot t + \varphi_x)$.

1⁰) Pour une pulsation ω_e de la force excitatrice, On donne ci-dessous les courbes d'évolution de la force excitatrice F et de l'élongation x en fonction du temps.

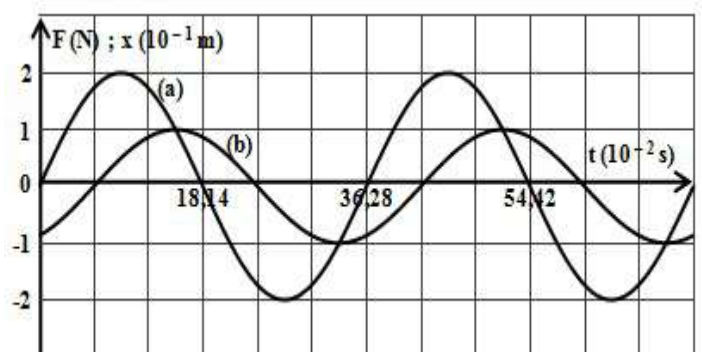
a - En identifiant chacune des courbes (a) et (b), déterminer graphiquement :

* La valeur de la pulsation ω_e .

* la valeur maximale F_m de la force excitatrice et celle de sa phase initiale φ_e .

* la valeur de l'amplitude X_m des oscillations.

b - Montrer que le déphasage $\varphi_e - \varphi_x$ entre la force excitatrice et l'élongation est $\Delta\varphi = \frac{\pi}{3}$ rad.



2⁰) L'équation différentielle qui gère les oscillations du pendule élastique est : $m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + h \cdot \frac{dx}{dt} + K \cdot x = F(t)$

La représentation de Fresnel associée au système oscillatoire étudié permet de construire la figure ci-contre :

a - Montrer que $\frac{\omega_c}{\omega_0} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ où ω_0 est la pulsation

propre du pendule élastique considéré.
Calculer alors la valeur de ω_0 .

b - Déterminer les valeurs de h , K et m .

3⁰) Les courbes de résonance d'amplitude $X_m = f(\omega_c)$ et de vitesse $V_m = g(\omega_c)$ sont données sur la figure ci-contre :

a - L'expression de la vitesse maximale

est :
$$V_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{K}{\omega_c} - m \cdot \omega_c\right)^2}}.$$

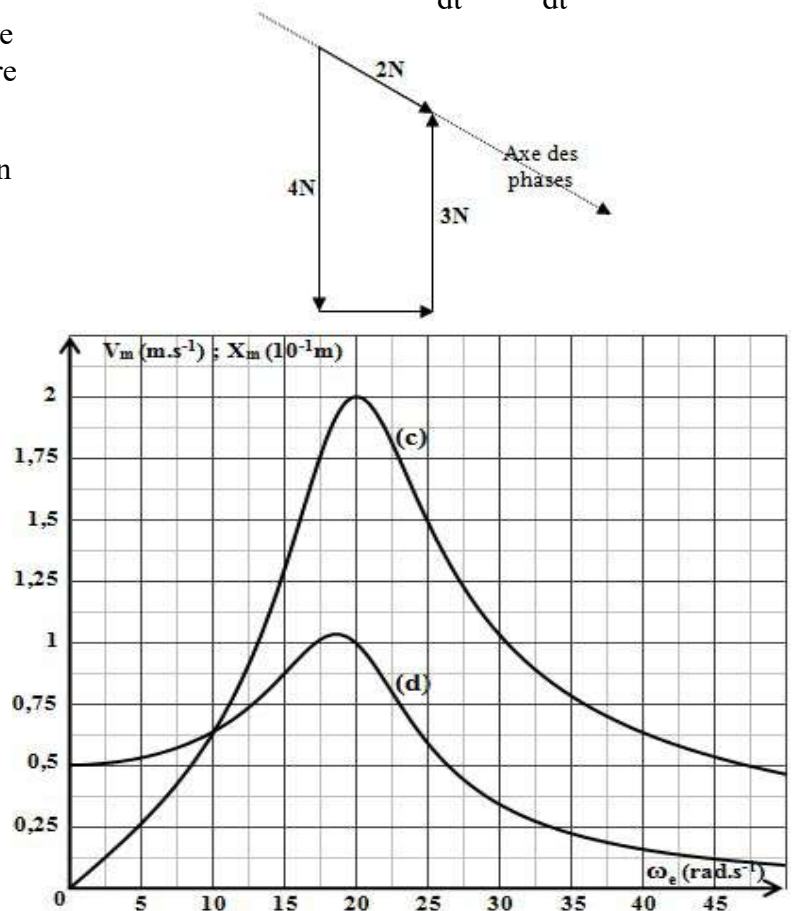
En déduire celle de l'amplitude X_m .

b - Montrer que la résonance d'amplitude

a lieu pour $\omega_c = \omega_r$ telle que : $\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2 \cdot m^2}$.

c - Identifier les courbes (c) et (d).

d - Retrouver les valeurs de h , K et m .



4⁰) Pour $\omega_{c1} = 10 \text{ rad.s}^{-1}$, $V_{m1} = 10 \cdot X_{m1}$.

a - Déterminer graphiquement la valeur de ω_{c2} pour laquelle $V_{m2} = V_{m1}$.

b - Montrer que $\omega_{c1} \cdot \omega_{c2} = \omega_0^2$. Retrouver par le calcul la valeur de ω_{c2} . Déterminer alors la valeur de X_{m2} .

